Demostración Matemática del Controlador Jacobiano Transpuesto y de la propiedad de Antisimetría

Sánchez-Sánchez Pablo[1], Reyes-Cortés Fernando[1], López-Benitez Aldo M.[2] y Jiménez-Avalos Cristobal[2]

[1] Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
F. C. E. \ Posgrado en Automatización
lepable@ece.buap.mx y freyes@ece.buap.mx

[2] Instituto Tecnológico de Puebla
Facultad de Electrónica
aldokendo@hotmail.com y avalos513@hotmail.com

***Abstract*— El objetivo principal de este artículo es realizar la demostración de algunas ecuaciones matemáticas existentes en la literatura de control que no cuentan con dicha comprobación formal y que se toman como válidas. Dentro de las ecuaciones a demostrar se encuentra el esquema de control conocido como *Controlador Jacobiano Transpuesto* y la propiedad de antisimetría utilizada en el *Moldeo de Energía*. Finalmente se realiza la validación de dichas demostraciones mediante el análisis del *Controlador Cartesiano PD*.**

Palabras Clave: Controlador Cartesiano, Controlador Jacobiano Transpuesto, Moldeo de Energía, Energía Potencial Artificial.

I. Introduccíon

En la literatura de control se encuentran numerosas ecuaciones y propiedades sin comprobación, todas ellas funcionales y de alguna forma aceptadas por la comunidad científica por lo cual actualmente en el diseño de controladores tanto en espacio Articular como Cartesiano se utilizan ecuaciones que se toman como válidas sin cuestionar su procedencia.

El objetivo de este artículo es demostrar un esquema de control conocido como *Controlador Jacobiano Transpuesto*, utilizado para eliminar las Singularidades y una propiedad de antisimetría utilizada en la metodologá de *Moldeo de Energía* para proponer controladores y comprobar su estabilidad.

El artículo esta organizado de la siguiente forma: en la sección 2 se describe la dinámica de un robot rígido en Espacio Cartesiano y sus propiedades, en la sección 3 se realiza la demostración de las ecuaciones analizadas. La validación de las demostraciones se utiliza en la sección 4 y finalmente las conclusiones son descritas en la sección 5.

II. Modelo Dinámico del Robot

Para realizar el control de un robot es necesario determinar su comportamiento dinámico, para lo cual aplicando leyes de la física podemos establecer su modelo matemático [1]. Para obtener el modelo matemático debemos considerar la Energía Total del sistema $\mathcal{E}(q,\dot{q})$ y la Dinámica del Robot Manipulador [2].

Un método ampliamente utilizado para obtener el Modelo Dinámico de un robot manipulador es el *Método de Euler-Lagrange* [3], al resolver la ecuación de Lagrange para un sistema conservativo [1], [4], [5], [6], [7], ecuación que se define como:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q})}{\partial q} = \tau - f(\tau,\dot{q}) \qquad (1)$$

donde $q,\dot{q} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ son el vector de desplazamiento y velocidad articular respectivamente, $\tau \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ es un vector de fuerzas y pares aplicados, $f(\tau,\dot{q}) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ es el vector de fricción y el Lagrangiano $\mathcal{L}(q,\dot{q})$ es la diferencia entre la energía cinética y la potencial [1], [4], [5], [6], [7],

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \mathcal{K}(q,\dot{q}) - \mathcal{U}(q), \qquad (2)$$

obtenemos el *Modelo Dinámico del Robot Manipulador* cuya su representación matemática es la siguiente:

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) + f(\tau,\dot{q}) + \tau_d = \tau \qquad (3)$$

donde $q,\dot{q},\ddot{q} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ son el vector de posición, velocidad y aceleración articular del robot, respectivamente, $M(q) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz de Inercias, $C(q,\dot{q}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz de Coriolis y Fuerza Centrípeta, $g(q) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ es el par gravitacional, $f(\tau,\dot{q}) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ es el vector de Fricción, $\tau \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ es el par aplicado y $\tau_d \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ representa las perturbaciones externas [8]. En ausencia de la fricción y otras perturbaciones, el modelo dinámico para un robot rígido de n grados de libertad es el siguiente [9], [10], [11], [12], [13]:

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau. \tag{4}$$

Ahora bien, la cinemática directa de un robot manipulador usualmente está definida por un conjunto de ecuaciones no lineales:

$$x = f(q) \tag{5}$$

donde x es un vector de coordenadas cartesianas y f es un mapa de funciones articulares del vector q. Al calcular la inversa de la ecuación (5),

$$q = f^{-1}(x), \tag{6}$$

se lleva a la velocidad y a la aceleración articular a la vecindad de una Singularidad. Típicamente, mediante el uso de Métodos Numéricos se mantienen estas cantidades dentro de los límites permitidos [14], pero esta no es la solución idónea. Para solucionar el problema de la Singularidad se utiliza la matriz Jacobiana Transpuesta, mediante el uso de esta matriz podemos relacionar la velocidad articular y la velocidad cartesiana de la siguiente forma:

$$\dot{x} = J(q)\dot{q}, \tag{7}$$

cuya representación inversa es:

$$\dot{q} = J(q)^{-1}\dot{x}. \tag{8}$$

Después de realizar derivadas temporales y algunas operaciones algebraicas podemos relacionar el Espacio Articular con el Espacio Cartesiano, tabla I.

TABLE I

COORDENADAS ARTICULARES A CARTESIANAS

Coordenadas Articulares	Coordenadas Cartesianas
$\dot{q} = J(q)^{-1}\dot{x}$	$\dot{x} = J(q)\dot{q}$
$\ddot{q} = J(q)^{-1}\ddot{x} - J(q)^{-1}\dot{J}(q)J(q)^{-1}\dot{x}$	$\ddot{x} = J(q)\ddot{q} + \dot{J}(q)\dot{q}$

Ahora bien, considerando el esquema de control propuesto por Arimoto [15] en 1981 basado en la **Conservación de la Energía**,

$$\tau = J(q)^T\mathcal{F} \tag{9}$$

donde τ es el vector del torque aplicado, $J(q)$ es la Matriz Jacobiana y $\mathcal{F}$ es el vector de fuerza aplicada al efector final, podemos obtener la representación del *Modelo Dinámico en Coordenadas Cartesianas*:

$$M(x)\ddot{x} + C(x,\dot{x})\dot{x} + g(x) = \tau_x, \tag{10}$$

donde:

$$\begin{aligned} M(x) &= J^{-T}M(q)J(q)^{-1} && (11)\\ C(x,\dot{x}) &= J^{-T}[CJ^{-1} - MJ^{-1}\dot{J}J^{-1}] && (12)\\ g(x) &= J^{-T}g(q) && (13)\\ \tau_x &= \mathcal{F}. && (14) \end{aligned}$$

A continuación se señalan las características más importantes del Modelo Dinámico del Robot Manipulador en Coordenadas Cartesianas, ecuación (10), las cuales se toman en cuenta para el diseño de Controladores.

Propiedad 1: La matriz de inercias $M(x)$ es una matriz definida positiva $M(x) > 0$, y es considerada una pseudo matriz de inercias. Esta pseudo matriz está acotada [16]:

$$\mu_1(x)I \le M(x) \le \mu_2(x)I \tag{15}$$

donde I es la matriz Identidad, $\mu_1(x) \neq 0$ y $\mu_2(x)$ es una constante escalar para una revolución de una articulación, generalmente es una función escalar de x para una articulación prismática [17]. Se dice que la matriz $M(x) = J(q)^{-T}M(q)J(q)^{-1}$ es definida positiva debido a que tiene la estructura Q^TAQ donde Q se sustituye por la matriz $J(q)^{-1}$ y A es una matriz simétrica [18].

Propiedad 2: Se considera que la matriz Antisimétrica $\dot{x}^T[\dot{M}(x) - 2C_m(x,\dot{x})]\dot{x} \equiv 0$, ya que:

$$\dot{M}(x) = C(x,\dot{x}) + C(x,\dot{x})^T. \tag{16}$$

La matriz $C(x,\dot{x})$ es una matriz lineal con respecto a x y acotada con respecto a $\dot{x}$ desde $k_c \in \mathbb{R}_+$ es decir:

$$\|C(x,\dot{x})\| \le k_c(x)\|\dot{x}\|. \tag{17}$$

donde $k_c(x)$ es un escalar constante para una revolución de una articulación, generalmente es una función escalar de x para una articulación prismática [17].

Propiedad 3: El par gravitacional $g(x) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ se obtiene mediante el Gradiente de la Energía Potencial $\mathcal{U}(x)$ del robot [16],

$$g(x) = \frac{\partial \mathcal{U}(x)}{\partial x} \tag{18}$$

donde $\mathcal{U}(x)$ es la Energía Potencial expresada en el espacio operacional y se supone acotada desde abajo [16], es decir, se encuentra acotada de la siguiente forma:

$$\left\| \frac{\partial g(x)}{\partial x} \right\| \le k_g \tag{19}$$

donde k_x es un escalar constante.

III. DEMOSTRACIONES

En esta sección se presenta la demostración matemática que valida las ecuaciones estudiadas.

III-A. *Controlador Jacobiano Transpuesto*

A principio del siglo XIX se observó que la energía tiene distintas formas, como la energía cinética $\mathcal{K}(q,\dot{q})$, la energía potencial $\mathcal{U}(q)$ o la energía térmica, y que pueden convertirse de una forma a otra; como consecuencia se formuló la ley de conservación de la energía. Esta ley, afirma que la suma de la energía cinética, la potencial y la energía térmica en un sistema cerrado permanece constante.

Demostración: Al resolver por partes la ecuación de Euler-Lagrange para un sistema conservativo sin considerar la fricción, podemos observar que al realizar la operación:

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}}\right] = \frac{\partial \mathcal{K}(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{U}(q)}{\partial \dot{q}} = M(q)\dot{q} = \rho, \tag{20}$$

obtenemos la representación del momento ρ. Si despejamos $\dot{q}$ de la ecuación anterior obtenemos:

$$\dot{q} = M(q)^{-1}\rho \tag{21}$$

ecuación que representa la velocidad articular del sistema. Al transponer la ecuación (20) y la ecuación (21) podemos elaborar la siguiente tabla:

TABLE II
VELOCIDAD ARTICULAR Y MOMENTO

	Ecuación Transpuesta
$\dot{q} = M(q)^{-1}\rho$	$\dot{q}^T = \rho^T M(q)^{-1}$
$\rho = M(q)\dot{q}$	$\rho^T = \dot{q}^T M(q)$

Asimismo, al considerar el Hamiltoniano $\mathcal{H}(q,\rho)$ y realizar la derivada parcial con respecto al momento ρ tenemos:

$$\left[\frac{\partial \mathcal{H}(q,\rho)}{\partial \rho}\right] = \frac{\partial \mathcal{K}(q,\dot{q})}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathcal{U}(q)}{\partial \rho} = M(q)^{-1}\rho = \dot{q}, \tag{22}$$

mismo resultado obtenido al desarrollar la derivada parcial del Lagrangiano $\mathcal{L}(q,\dot{q})$ con respecto a la aceleración articular $\dot{q}$, ecuación (20), razón por la cual podemos considerar la siguiente relación del valor de la energía cinética:

$$\mathcal{K}(q,\dot{q}) = \frac{\dot{q}^T M(q)\dot{q}}{2} = \frac{\rho^T M(q)^{-1}\rho}{2}. \tag{23}$$

Al derivar la ecuación (20),

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}}\right] = \dot{\rho}, \tag{24}$$

podemos representar la ecuación de Euler-Lagrange de la siguiente manera:

$$\dot{\rho} - \frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q})}{\partial q} = \tau. \tag{25}$$

El segundo término de la ecuación (25) podemos representarlo de varias formas:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q,\dot{q})}{\partial q} = -\frac{\mathcal{U}(q)}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{H}(q,\rho)}{\partial q} = \dot{\rho}, \tag{26}$$

modificando la estructura de la ecuación (25) como se muestra a continuación:

$$\dot{\rho} + \frac{\partial \mathcal{H}(q,\rho)}{\partial q} = \tau \tag{27}$$

donde el Hamiltoniano representa la *Energía del Sistema* [19], [20].

Al realizar la derivada del Hamiltoniano con respecto al tiempo t, tenemos:

$$\frac{d\mathcal{H}(q,\rho)}{dt} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}(q,\rho)}{\partial q}\right)^T \dot{q} + \left(\frac{\partial \mathcal{H}(q,\rho)}{\partial \rho}\right)^T \dot{\rho}. \tag{28}$$

Sustituyendo la ecuación (22) en la ecuación (28),

$$\frac{d\mathcal{H}(q,\rho)}{dt} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}(q,\rho)}{\partial q}\right)^T \left(\frac{\partial \mathcal{H}(q,\rho)}{\partial \rho}\right) + \left(\frac{\partial \mathcal{H}(q,\rho)}{\partial \rho}\right)^T \dot{\rho}, \tag{29}$$

aplicando la propiedad $x^T y = y^T x$,

$$\frac{d\mathcal{H}(q,\rho)}{dt} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}(q,\rho)}{\partial \rho}\right)^T \left(\frac{\partial \mathcal{H}(q,\rho)}{\partial q}\right) + \left(\frac{\partial \mathcal{H}(q,\rho)}{\partial \rho}\right)^T \dot{\rho}, \tag{30}$$

y factorizando la ecuación (30) obtenemos:

$$\frac{d\mathcal{H}(q,\rho)}{dt} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}(q,\rho)}{\partial \rho}\right)^T \left[\frac{\partial \mathcal{H}(q,\rho)}{\partial q} + \dot{\rho}\right]. \tag{31}$$

Como se observa podemos transformar la ecuación (31) al sustituir las ecuaciones (22) y (27):

$$\frac{d\mathcal{H}(q,\rho)}{dt} = \dot{q}^T \tau. \tag{32}$$

Aplicando la propiedad $x^T y = y^T x$ en la ecuación (32) obtenemos una expresión que indica un incremento en la Energía del Sistema representada por el

Hamiltoniano al mismo nivel que proporciona el Trabajo $\mathcal{W}$ realizado por el sistema, lo que se interpreta como *Conservación de la Energía* [19]:

$$\mathcal{W} = \frac{d\mathcal{H}(q,\rho)}{dt} = \tau^T \dot{q}. \tag{33}$$

Cuando una fuerza se aplica sobre un cuerpo se produce un trabajo $\mathcal{W}$, el trabajo es el producto entre la fuerza aplicada sobre un cuerpo y el desplazamiento del cuerpo en la dirección de esta fuerza. Mientras se realiza trabajo sobre el cuerpo, se produce una transferencia de energía al mismo, por lo que puede decirse que el trabajo es energía en movimiento. Las unidades del trabajo son las mismas que las de la energía (Joules) por lo cual el trabajo puede ser interpretado en cualquier sistema de referencia, específicamente podemos interpretar el trabajo en términos de coordenadas cartesianas. En el caso multidimensional el trabajo es el producto punto de un vector fuerza o torque aplicado y un vector de desplazamiento [20],

$$\mathcal{W} = F^T \dot{x}, \tag{34}$$

condición necesaria para satisfacer el equilibrio estático,

$$F^T \dot{x} = \tau^T \dot{q} \tag{35}$$

donde $F \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ es el vector *Momento-Fuerza* en coordenadas cartesianas que actúa en el efector final, $\dot{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ es la velocidad del efector final en coordenadas cartesianas, $\tau \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ es el vector de torque aplicado en coordenadas articulares y $\dot{q} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ es la velocidad del efector final en coordenadas articulares.

Considerando el trabajo realizado por el sistema para mantener un equilibrio estático, ecuación (35), podemos sustituir la ecuación (7),

$$F^T J(q)\dot{q} = \tau^T \dot{q}, \tag{36}$$

y multiplicar por $\dot{q}^T(\dot{q}\dot{q}^T)^{-1}$,

$$F^T J(q)(\dot{q}\dot{q}^T)(\dot{q}\dot{q}^T)^{-1} = \tau^T(\dot{q}\dot{q}^T)(\dot{q}\dot{q}^T)^{-1}, \tag{37}$$

para poder aplicar la propiedad $AA^{-1} = I$ y modificar la ecuación (37) de la siguiente forma:

$$F^T J(q) = \tau^T. \tag{38}$$

Finalmente al aplicar la propiedad $x^T y = y^T x$ obtenemos la segunda ecuación de transformación, ecuación que podemos interpretar como un controlador en modo libre que utiliza la transformación estática para convertir un punto final (Fuerza/Momento) F en un punto de torque deseado τ,

$$\tau = J(q)^T F \tag{39}$$

donde $J(q)$ es la matriz Jacobiana del robot y F es la fuerza que se desea aplicar, la cual se calcula mediante una función Cartesiana de error como en el control de impedancias o el control rígido. $\square$

III-B. *Propiedad de Antisimetría*

Sea la propiedad:

$$x^T \left[\dot{M}(x) - 2C(x,\dot{x})\right] x \equiv 0 \quad \text{Matriz Antisimétrica.} \tag{40}$$

Demostración: Partiendo de la definición de la derivada de la matriz de inercias en función de la Matriz de Coriolis, tenemos:

$$\dot{M}(x) = C(x,\dot{x}) + C(x,\dot{x})^T. \tag{41}$$

La propiedad descrita en la ecuación (40) es una propiedad muy utilizada tanto en el espacio Articular como en el espacio Cartesiano, por lo que su demostración matemática es muy importante.

Sustituyendo la representación de $\dot{M}(x)$ en función de la matriz de Coriolis $C(x,\dot{x})$, ecuación (41), en la ecuación (40) tenemos:

$$x^T \left[C(x,\dot{x}) + C(x,\dot{x})^T - 2C(x,\dot{x})\right] x = 0. \tag{42}$$

Al resolver la operación dentro de los corchetes:

$$x^T \left[C(x,\dot{x})^T - C(x,\dot{x})\right] x = 0, \tag{43}$$

podemos expander la ecuación de la siguiente forma:

$$x^T C(x,\dot{x})^T x - x^T C(x,\dot{x}) x = 0, \tag{44}$$

representación que podemos manipular utilizando la propiedad $(xyz)^T = z^T y^T x^T$,

$$\begin{aligned} &x^T C(x,\dot{x}) x - x^T C(x,\dot{x}) x = 0 \\ &0 \equiv 0 \end{aligned} \tag{45}$$

de esta forma se comprueba la validez de la propiedad descrita en la ecuación (40). Debe tenerse en cuenta que esta propiedad es valida tanto en el espacio articular como en el espacio cartesiano por lo que su demostración es la misma. $\square$

IV. CONTROLADOR CARTESIANO PD

Un controlador Cartesiano PD para una serie de manipuladores puede escribirse como:

$$\tau_x = K_p\tilde{x} - K_v\dot{x} + g(x) + f(\tau_x, \dot{x}) \tag{46}$$

donde $\tilde{x}$ es el error de posición en coordenadas cartesianas, es decir señala la diferencia entre la posición deseada x_d y la posición real x, K_p es la ganancia del control proporcional, K_v es la ganancia del control derivativo, $g(x)$ es el Par gravitacional y $f(\tau_x, \dot{x})$ es el término de fricción.

Para realizar un análisis y demostrar estabilidad debemos de obtener primero el *Modelo de Lazo Cerrado*, para lo cual debemos de considerar el *Modelo Dinámico en Coordenadas Cartesianas*, ecuación (10), y relacionarlo con el Controlador Cartesiano propuesto, ecuación (46), y expresar las variables de estado del sistema considerando el error de posición $\tilde{x}$ como un estado:

$$\begin{array}{ll} x_1 = \tilde{x} = x_d - x & x_2 = \dot{x} \\ \dot{x}_1 = -\dot{x} & \dot{x}_2 = \ddot{x} \end{array} \tag{47}$$

Despejando el controlador, ecuación (46), en el Modelo Dinámico tenemos:

$$\begin{aligned} M(x)\ddot{x} + C(x,\dot{x})\dot{x} + g(x) + f(\tau_x, \dot{x}) \\ = K_p\tilde{x} - K_v\dot{x} + g(x) + f(\tau_x, \dot{x}). \end{aligned} \tag{48}$$

Acomodando la ecuación,

$$\begin{aligned} M(x)\ddot{x} + C(x,\dot{x})\dot{x} + g(x) + f(\tau_x, \dot{x}) - g(x) \\ -f(\tau_x, \dot{x}) = K_p\tilde{x} - K_v\dot{x}, \end{aligned} \tag{49}$$

podemos observar que se eliminan varios términos:

$$M(x)\ddot{x} + C(x,\dot{x})\dot{x} = K_p\tilde{x} - K_v\dot{x}. \tag{50}$$

Al despejar $\ddot{x}$ de la ecuación,

$$\ddot{x} = M(x)^{-1}\left[K_p\tilde{x} - K_v\dot{x} - C(x,\dot{x})\dot{x}\right], \tag{51}$$

obtenemos el *Modelo de Lazo Cerrado*:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\tilde{x} \\ \dot{x}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{x} \\ M(x)^{-1}\left[K_p\tilde{x} - K_v\dot{x} - C(x,\dot{x})\dot{x}\right]\end{bmatrix}. \tag{52}$$

Ahora proseguimos a analizar la existencia del punto de equilibrio, para lo cual debemos de considerar las derivadas del sistema como cero, $\dot{\tilde{x}} = \ddot{x} = 0$, así tenemos:

$$\begin{array}{c} -\dot{x} = 0 \\ M(x)^{-1}\left[K_p\tilde{x} - K_v\dot{x} - C(x,\dot{x})\dot{x}\right] = 0. \end{array} \tag{53}$$

El punto de equilibrio para $\dot{x}$ es:

$$\begin{array}{c} \dot{x} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{I}\dot{x} = 0 \\ \Longrightarrow \dot{x} = 0, \end{array} \tag{54}$$

Para $\tilde{x}$ tenemos:

$$M(x)^{-1}K_p\tilde{x} = 0, \tag{55}$$

como se advierte $M(x)$ y K_p son matrices constantes por lo que $\tilde{x} = 0$, comprobando la existencia del punto de equilibrio.

El siguiente paso es demostrar estabilidad para lo cual es necesario proponer una función de Lyapunov que cumpla con las condiciones definidas en la ecuación (56).

$$\begin{array}{ll} V(0,0) = 0 & \forall\ \dot{q}, \tilde{q} = 0 \\ V(\dot{q}, \tilde{q}) > 0 & \forall\ \dot{q}, \tilde{q} \neq 0 \end{array} \tag{56}$$

Para este caso utilizaremos la técnica de *Moldeo de Energía* con la característica de que se aplica en el espacio Cartesiano, por lo cual el Controlador Cartesiano PD se representa de la forma:

$$\tau = \nabla\mathcal{U}(k_p, \tilde{x}) - f_v(k_v, \dot{x}) + g(x) + f(\tau_x, \dot{x}) \tag{57}$$

donde:

$$\nabla\mathcal{U}(k_p, \tilde{x}) = K_p\tilde{x} \tag{58}$$

$$f_v(k_v, \dot{x}) = K_v\dot{x}. \tag{59}$$

Ahora bien, se propone la siguiente función de Lyapunov:

$$V(\dot{x}, \tilde{x}) = \frac{\dot{x}^T M(x)\dot{x}}{2} + \frac{\tilde{x}^T K_p\tilde{x}}{2}. \tag{60}$$

Como se observa la función cumple con las condiciones:

$$\begin{array}{ll} V(0,0) = 0 & \forall\ \dot{x}, \tilde{x} = 0 \\ V(\dot{x}, \tilde{x}) > 0 & \forall\ \dot{x}, \tilde{x} \neq 0. \end{array} \tag{61}$$

Al derivar la función de Lyapunov, ecuación (60),

$$\dot{V}(\dot{x}, \tilde{x}) = \dot{x}^T M(x)\ddot{x} + \frac{\dot{x}^T \dot{M}(x)\dot{x}}{2} + \tilde{x}^T K_p\dot{\tilde{x}} \tag{62}$$

y sustituir el valor de las derivadas $\ddot{x}$ y $\dot{\tilde{x}}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{x}, \tilde{x}) = \frac{\dot{x}^T \dot{M}(x)\dot{x}}{2} - \tilde{x}^T K_p\dot{x} \\ +\dot{x}^T M(x)\left(M(x)^{-1}\left[K_p\tilde{x} - K_v\dot{x} - C(x,\dot{x})\dot{x}\right]\right). \end{aligned} \tag{63}$$

realizando la multiplicación se elimina el término $M(x)$:

$$\dot{V}(\dot{x},\tilde{x}) = \frac{\dot{x}^T \dot{M}(x)\dot{x}}{2} - \tilde{x}^T K_p \dot{x} + \dot{x}^T \left[K_p \tilde{x} - K_v \dot{x} - C(x,\dot{x})\dot{x}\right]. \tag{64}$$

Al expandir la ecuación,

$$\dot{V}(\dot{x},\tilde{x}) = \dot{x}^T K_p \tilde{x} - \dot{x}^T K_v \dot{x} - \dot{x}^T C(x,\dot{x})\dot{x} + \frac{\dot{x}^T \dot{M}(x)\dot{x}}{2} - \tilde{x}^T K_p \dot{x}, \tag{65}$$

y aplicar la propiendad $(xyz)^T = z^T y^T x^T$,

$$\dot{V}(\dot{x},\tilde{x}) = \dot{x}^T K_p \tilde{x} - \dot{x}^T K_v \dot{x} - \dot{x}^T C(x,\dot{x})\dot{x} + \frac{\dot{x}^T \dot{M}(x)\dot{x}}{2} - \dot{x}^T K_p \tilde{x}, \tag{66}$$

eliminamos los términos que contienen a K_p:

$$\dot{V}(\dot{x},\tilde{x}) = -\dot{x}^T K_v \dot{x} - \dot{x}^T C(x,\dot{x})\dot{x} + \frac{\dot{x}^T \dot{M}(x)\dot{x}}{2}. \tag{67}$$

Factorizando la ecuación,

$$\dot{V}(\dot{x},\tilde{x}) = -\dot{x}^T K_v \dot{x} + \frac{1}{2}\dot{x}^T [\dot{M}(x) - 2C(x,\dot{x})]\dot{x}, \tag{68}$$

y aplicando la propiedad $\dot{M}(x) - 2C(x,\dot{x})$, ecuación (40), tenemos:

$$\dot{V}(\dot{x},\tilde{x}) = -\dot{x}^T K_v \dot{x} \leq 0. \tag{69}$$

Como se observa la derivada de la Función de Lyapunov es Semidefinida Negativa, demostrando que el punto de equilibrio es Estable, cumpliendo con la condición:

$$\dot{V}(\dot{x},\tilde{x}) \leq 0, \tag{70}$$

obteniendo estabilidad asintótica global con el empleo del *Teorema de LaSalle*:

$$\dot{V}(\dot{x},\tilde{x}) < 0. \tag{71}$$

V. Conclusiones

En este artáculo se han demostrado dos ecuaciones importantes utilizadas ampliamente en el diseño y comprobación de estabilidad de controladores tanto en Espacio Articular como en el Cartesiano.

References

[1] A. K. Becjzy, *Robot arm dynamics and control*, (Technical Memo 33-669, Pasadena, CA: NASA Jet Propulsion Laboratory, 1976).

[2] F. Reyes and R. Kelly, Experimental Evaluation of Identification Schemes on a Direct Drive Robot, *Robotica*, 15(5), 1997, 563-571.

[3] A. Loría, *On Output Feedback Control of Euler-Lagrange*, (France: Université de Technologie de Compiégne, PhD Thesis, 1996)

[4] H. Goldstein, *Classical Dynamics*, (Reading, MA.: Addison-Wesley, 1950).

[5] A. Barrientos, L. F. Peñin, C. Balaguer and R. Aracil, *Fundamentos de Robótica*, (Madrid, España: McGraw Hill, 1997).

[6] L. Sciavicco and B. Siciliano, *Modeling and Control of Robot Manipulators*, (Napoles, Italia: McGraw Hill, 1996).

[7] V. Santibáñez, R. Kelly and F. Reyes, A New Set-Point Controller with Bounded Torques for Robot Manipulators, *IEEE transaction on Industrial Electronics*, 45(4), 1998, 126-133.

[8] R. J. Shilling, *Fundamentals of Robotics: Analysis and Control*, (Eaglewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1990).

[9] W. S. Tang and J. Wang, Two recurrent neural networks for local joint torque optimization of kinematically redundant manipulators, *IEEE Transactions on Systems, man, and cybernetics*, 30(1), 2000, 120-128.

[10] F. Reyes and C. Campuzano, PD-Type Controller with Nonlinear Proporcional Gain for Robot Manipulators, *XX Congreso Internacional Académico de Ingeniería Electrónica*, Puebla, México, 1998, 357-360.

[11] V. Santibañez and R. Kelly, Analisys of Energy Shaping based controllers for elastic joint robots via passivity theory, *Proceedings of the 36th conference on decision and control*, San Diego, California, 1997, 1347-1352.

[12] V. Santibañez and R. Kelly, A class of nonlinear PID global regulators for robot manipulators, *Proceedings of the 1998 IEEE International conference on Robotics and Automation*, Leuven, Belgium, 1998, 3601-3606.

[13] M. M. Pérez Trujillo, *Control de Movimiento de un Robot Manipulador de Dos Grados Libertad*, (México: INAOE, MC. Tesis, 1999)

[14] G. Schreiber and G. Hirzinger, Singularity Consistent Inverse Kinematics by enhancing the Jacobian Transpose, *Proceeding of the Advances in Robot Kinematic: Analisys and Control ARK98*, Wolfgangsee, Germany, 1998, 209-216.

[15] M. Takegaki and S. Arimoto, A NewFeedback Method for Dynamic Control of Manipulators, *Journal of Dynamic System, Measurement and Control*, 102(2), 1981, 119-125.

[16] A. Loría and R. Ortega, Force/Position Regulation for Robot Manipulators with Unmeasurable Velocities and Uncertain Gravity, *Proceeding IFAC Workshop on Motion Control*, Munich, Germany, 1995.

[17] R. Kelly, V. Santibáñez and F. Reyes, A Class of Adaptive Regulators for robot manipulator, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 12(1), 1998, 41-62.

[18] A. G. Kurosch, *Curso de Algebra Superior*, (Moscu: Editorial MIR, 1968).

[19] B. Maschke, R. Ortega and A. V. Schaft, *Modeling and Control of physical system: an approach based on energy and interconnection*, (France: University Press, 1999).

[20] A. Loría, R. Kelly, R. Ortega and V. Santibañez, On output feedback control of Euler-Lagrange systems under input constrains, *IEEE Transactions on Control*, 42(8), 1996, 1138-1142.

[21] P. Sánchez-Sánchez, *Control Cartesiano de Robots Manipuladores*, (México: B. U. A. P., MC. Tesis, 2005)